

```

* . . . . .
L 1 2 200MH IC=0
S 2 0 5 0 SMOD
D 2 3 DMOD
R 3 1 20
VCONTROL 5 0 PULSE(-10 10 0 10N 10N 10MS 10MS)
* . . . . .
TRAN 1M 100MS 0 .1M UIC
* . . . . .
PROBE
MODEL SMOD VSWITCH(RON = .001)
MODEL DMOD D
END

```

Modelový aspekt analýzy ekonomických procesov podniku a metódy riešenia

Model aspect of the analysis of companies economic processes and methods for their solutions

Ivan Brezina, Zuzana Čičková

Abstract:

In the analysis of economic processes is generally appropriate and effective to apply a quantitative approach based on the application of mathematical models. Economic-mathematical models provide the ability to model the economic process through mathematical expressions and relations. The aim is to formulate such models and related problems that can be addressed by appropriate mathematical methods. The corresponding problems can be solved using standard optimization methods. Because of the problems arising from the needs of practice often leads to large-scale models and large computational complexity, to apply such methods is sometimes impossible, or difficult, time consuming, so now the increasing interest is turned to non-traditional methods, especially in the field of artificial intelligence. Effective fulfillment of the nature of the model approach and solution of the resulting optimization problems using a classical, resp. "modern" methods is possible only in conjunction with the use of appropriate tools of information and communication technologies.

Keywords:

modelling, economic-mathematical model, optimization, computational complexity, heuristics

ACM classification: F.2, F.4.1, G.0, I.2.8, J.4

▀ ÚVOD

Ekonomické procesy predstavujú vo všeobecnosti veľmi komplikované systémy a preto podrobné vyjadrenie ich vnútorných relácií, ako aj relácií na okolie, možno realizovať len prostredníctvom pomerne zložitého systému vzťahov, ktoré možno vyjadriť pomocou zložitého systému modelov, resp. prostredníctvom zložitých parciálnych modelov. Na analýzu ekonomických procesov možno pritom veľmi efektívne použiť kvantitatívne prístupy založené na aplikácii matematických modelov.

Matematická analýza zameraná na kvantitatívne vzťahy medzi jednotlivými ekonomickými a niekedy aj neekonomickými faktormi, ktoré sa dynamicky vyvíjajú v čase a vzájomne na seba interaktívne pôsobia, poskytuje možnosť aspoň čiastočne odhaliť ich vnútorné závislosti. Pri skúmaní jednotlivých ekonomických procesov nie je zvyčajne potrebné detailne analyzovať informácie o jeho všetkých aspektoch. Relevantné je predovšetkým vymedzenie hlavných

aspektov a vzťahov daného procesu. Namiesto reálneho ekonomického procesu možno potom skúmať jeho zjednodušené vyjadrenie prostredníctvom modelu.

Za najvšeobecnejšie, ale aj najabstraktnejšie, možno považovať ekonomicko-matematické modely, ktoré prezentujú modelovaný ekonomický proces prostredníctvom matematických výrazov a vzťahov. Modelované veličiny možno vyjadriť pomocou sústavy premenných, parametrov a konštánt. Cieľom modelového prístupu je formulovať také modely a s nimi súvisiace úlohy, ktoré možno riešiť vhodnými matematickými metódami a prostriedkami. Na ich riešenie sa využívajú klasické optimalizačné metódy riešenia. Pretože úlohy vyplývajúce z potrieb praxe často vedú k modelom veľkého rozsahu a veľkej výpočtovej zložitosti, riešenie takýmito metódami býva niekedy nemožné, respektíve komplikované a zdĺhavé, v súčasnosti preto možno sledovať zvyšujúci sa záujem o netradičné metódy riešenia, predovšetkým z oblasti umelej inteligencie. Efektívne naplnenie podstaty modelového prístupu a riešenie z toho vyplývajúcich optimalizačných úloh pomocou klasických, resp. „moderných“ metód je možné len v súčinnosti s využitím vhodných prostriedkov informačných a komunikačných technológií.

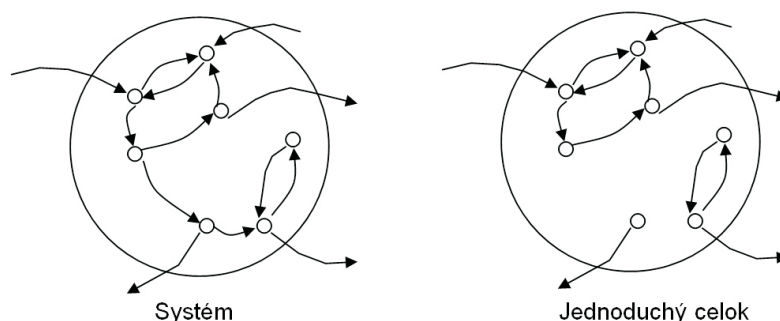
1. Problém, model, úloha

Súčasná transformácia ekonomických procesov a nové smery vo vývoji informačných a komunikačných technológií prinášajú odklon od tradičných prístupov k riadeniu a zmenu nárokov na podporné informácie. Distribúcia riadenia a funkcií do viacerých uzlov vedie k posilneniu decentralizovaných organizačných štruktúr, ktoré sú schopné aplikovať rýchle zmeny v celom systéme. Presunom rozhodovacích právomocí do miest vzniku informačnej potreby možno podstatne skrátiť čas rozhodovania, minimalizovať potrebu komunikácie a dosiahnuť určitú autonómiu pri rozhodovaní tak, že na rozhodovaní sa podieľajú len tie prvky systému, ktorých sa problém týka (Závodný, Chudá, 2006).

K tomu, aby mala organizácia k dispozícii relevantné individuálne informácie, musí mať k dispozícii vhodné informačné systémy. Nevyhnutné je pritom získavať podstatné a overené dáta, ktoré sú nevyhnutné pre rozhodovanie. Rozloženie dát na viaceré uzly v systémoch distribuovaného spracovania dát vedie k možnosti prevádzkovať jednotlivé podsystémy informačného systému organizácie, čo spôsobuje minimalizáciu toku dát, zvýšenie výkonu a zlepšenie spoľahlivosti systému (Goga, 2005).

Z hľadiska systémového chápania ekonomických javov, napr. (Sakál, Jerz, 2006), (Šimkovic, Terek, 1987), (Goga, 2005), je vhodné chápať ekonomický systém ako celok vzájomne prepojených prvkov, ktoré na seba navzájom priamo alebo nepriamo pôsobia, pričom ekonomický systém vždy zameraný na dosiahnutie nejakého špecifického ekonomického cieľa, prípadne skupiny cieľov. Všeobecne má systém tieto základné vlastnosti:

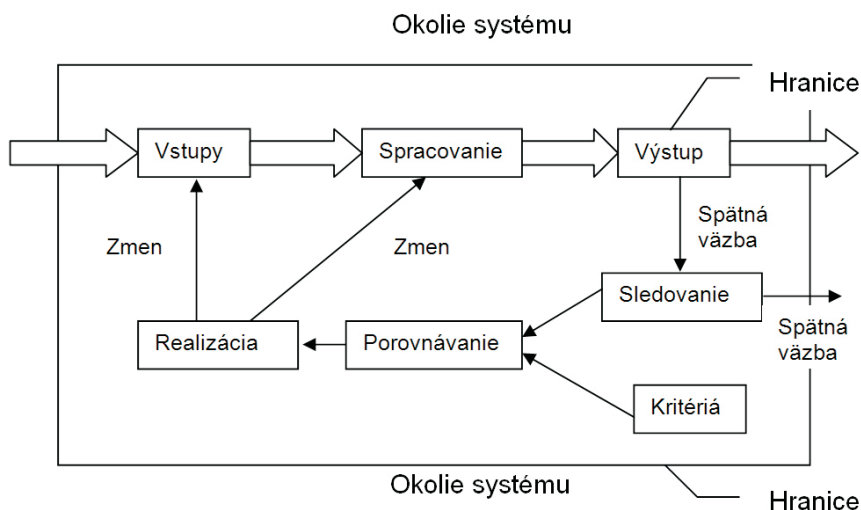
1. celosťnosť a čiastočnosť – systém predstavuje celostné zoskupenie prvkov, systém teda strany možno chápať ako celok, ale na druhej strane možno v tomto celku identifikovať samostatné prvky, ktoré môžu existovať len v rámci systému, je to teda jednotný celok vzájomne sa ovplyvňujúcich prvkov, ktoré sú často nehomogénne, ale spolupatričné (obr. 1),
2. zviazanosť – medzi prvkami systému možno uplatniť rozličné vzájomné väzby, ktoré sú práve zo systémového hľadiska podstatné (tým sa líši systém od súhrnu prvkov),
3. organizovanosť – systém možno charakterizovať jeho vnútornou organizáciou,
4. integračné vlastnosti – systému ako celok možno identifikovať na základe vlastnosti, ktorými nedisponuje osobitne ani jeden jeho prvok, pretože prvok systému je len jeho časťou a nie celkom, integračné vlastnosti spôsobujú, že systém ako celok nadobúda synergický efekt – dosahuje vyššiu efektívnosť ako je súčtová efektívnosť jeho častí (jeden z prvých teoretikov teórie systémov Ludwig von Bertalanffy skúmal, prečo sa úspešné systémy prejavujú tak, že celok je významnejší ako súčet všetkých prvkov dohromady akoby platilo $2 + 2 = 5$).



Obr. 1: Systém a jednoduchý celok

Systém sa vo všeobecnosti vždy skladá z jednotlivých systémových elementov, špecifických pre každý osobitný systém. Zvyčajne sa ako hlavné systémové elementy uvádzajú, napr. (Šimkovic, Terek, 1987), (Goga, 2005): vstupy, kritériá, spracovanie, výstupy, spätná väzba, sledovanie, porovnávanie, realizácia (obr. 2).

Vstupy zvyčajne predstavujú hmotné a nehmotné toky, ktoré vstupujú z okolia do systému. Ďalej sa zameriame na nehmotné vstupy do systému, ktoré predstavujú informácie. Kritériá sú definované cieľmi, ktoré má systém dosiahnuť. Stanovením kritérií je determinovaný výkon systému. Vyhodnotenie kritérií umožňuje posúdiť, či systém pracuje dobre, či úspešne plní všetky svoje funkcie. Toto vyhodnotenie má podstatný vplyv na riadenie celého systému a môže sa premietnuť napríklad do úpravy vstupných tokov. Tieto informácie, ktoré majú spätný vplyv na systém, možno charakterizovať ako spätnú väzbu. Spracovanie predstavuje vlastnú premenu vstupov na výstupy, ktorá závisí od charakteristiky systému, ďalej budeme sledovať proces premeny primárnych údajov na informácie. Výstupy sú finálnym produktom systému. Sledovanie vo svojej podstate znamená meranie výstupov systému (množstvo, kvalitu a pod.) a teda sledovanie plnenia kritérií (cieľov) systému. Porovnávanie predstavuje prostriedok na vyhodnocovanie dosiahnutých výsledkov v súvislosti s naplánovanými hodnotami. Na základe porovnávania možno zisťovať odchýlky od naplánovaného stavu a v rámci realizácie tieto odchýlky upravovať.



Obr. 2: Hlavné systémové elementy

Systém je vo všeobecnosti abstraktný pojem, predstavuje spôsob myslenia o objekte, resp. procese, ktorý reálne existuje (Goga, 2005). Systémový prístup poskytuje široké možnosti na modelovanie ekonomických procesov, ktorý vychádza na jednej strane z koncepcie skúmania ekonomických javov, na druhej strane akceptuje rozvoj matematických prístupov z rôznych

aplikačných oblastí Sojka, Walter a kol., 1986. Vo všeobecnosti sa pod klasickým modelovaním chápe formulácia modelu, numerické aspekty riešenia s ním súvisiacej úlohy, problém zabezpečenia údajov a otázka spoľahlivosti údajov, otázka nasadenia a využitia výpočtovej techniky a implementácia modelu ((Sojka, Walter a kol., 1986)). Rozšírené chápanie modelového prístupu pre ekonomické systémy poskytujú (Kiš, Čileg, Vugdelija, Sedlak, 2005), ktorý pod tvorbou ekonomicko-matematického modelu chápu zber dát (vytvorenie bázy údajov), formuláciu ekonomicko-matematického modelu, riešenie modelu, ekonomickú interpretáciu, kvalitatívnu analýzu riešenia a formulovanie návrhov pre hospodársku rozhodovanie, rozhodnutie, realizáciu rozhodnutia a kontrolu realizácie, analýzu ďalších návrhov a informáciu o potrebe preformulovania modelu. Iný prístup na podporu rozhodovacích procesov predkladajú (Chajdiak, Grell, 2006), ktorí rozlišujú pojmy model a úloha a proces modelovania zhŕňajú do identifikácie a definície problému (definovanie cieľa), riešenia problému rozhodovania – tvorby modelu (konštrukcia rozhodovacej úlohy), výber riešenia a interpretácia získaných výsledkov s rozhodnutím, realizácia prijatého rozhodnutia. Podobný prístup je uplatnený v prácach (Ivaničová, Brezina, Pekár, 2002), (Brezina, Ivaničová, Pekár, 2007). Zhrnutím rôznych prístupov by mohla byť nasledujúca konštrukcia:

1. Identifikácia problému a definovanie cieľa, výber faktorov a obmedzujúcich podmienok.
2. Analýza objektu, identifikácia jeho vlastností.
3. Tvorba modelu, vytvorenie funkčného modelu (analýza požiadaviek, analýza informácií, stanovenie kritéria, stanovenie variantov) a dátového modelu (získovanie údajov, odhad rizika).
4. Konštrukcia rozhodovacej úlohy.
5. Hľadanie metód a výber metódy na riešenie rozhodovacej úlohy.
6. Nájdenie, resp. tvorba zodpovedajúceho algoritmu na riešenie rozhodovacej úlohy.
7. Výber programu na riešenie rozhodovacej úlohy a jej riešenie.
8. Verifikácia samotného modelu.
9. Simulácie realizované na rozhodovacej úlohe (simulácie predovšetkým extrémnych prípadov).
10. Interpretácia získaných výsledkov a prijatie rozhodnutia.
11. Realizácia prijatého rozhodnutia.

V súlade s uvedenou ideovou schémou treba definovať základné pojmy. Pod pojmom *problém* možno všeobecne rozumieť vymedzenie obsahu rozhodovacieho procesu obsahujúceho podstatné parametre. *Model* predstavuje viac alebo menej presný zjednodušený odraz reality (integruje v sebe najdôležitejšie zložky reálneho systému). *Matematický model* predstavuje zjednodušené formalizované zobrazenie reálnych vzťahov pomocou matematických nástrojov, teda identifikáciu štruktúry tvarov matematických vzťahov a identifikáciu parametrov reprezentovaných konkrétnymi číselnými hodnotami (ekonomicko-matematický model zobrazuje relevantné vzťahy ekonomického procesu). Formalizácia problému matematickými prostriedkami spočíva vo vytvorení určitej sústavy matematických vzťahov s konkrétnymi premennými, pravidla sa vyžaduje adaptácia štandardných postupov, ale aj individuálny prístup analytika schopného identifikovať zodpovedajúci, resp. vytvoriť nový typ modelu. Na formalizáciu možno aplikovať aj iný, ako matematický model (napr. grafický model), na počítačové riešenie je však matematická formulácia najvhodnejšia. *Rozhodovacia úloha* je potom konkrétne zadanie všetkých parametrov modelu (model predstavuje napr. lineárny model optimalizácie výrobného procesu podniku, rozhodovaciu úlohu konkrétny výrobný proces v určitom čase, s určitými vstupnými údajmi). Na riešenie rozhodovacej úlohy treba predovšetkým identifikovať a následne použiť vhodný zodpovedajúci *algoritmus*, ktorý predstavuje presný výpočtový postup, ktorý pre každé zadanie parametrov nájde riešenie danej rozhodovacej úlohy. Pod algoritmom možno teda rozumieť postupnosť krokov, resp. pravidiel, ktoré pre každé zadanie parametrov nájdu riešenie danej rozhodovacej úlohy alebo poskytnú informáciu, že príslušné riešenie neexistuje.

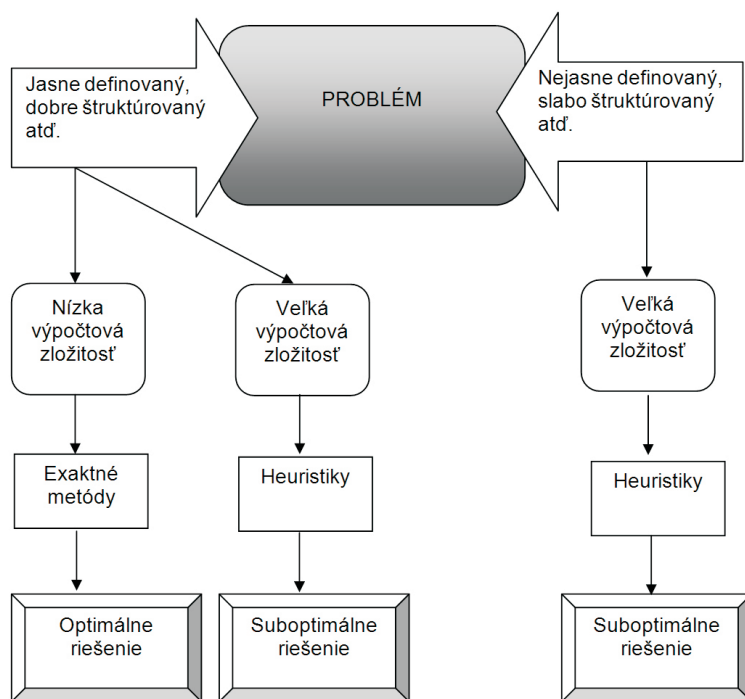
2. Metódy riešenia rozhodovacích úloh

Optimalizácia ekonomických problémov prostredníctvom riešenia rozhodovacích úloh skonštruovaných v rámci ekonomicko-matematických modelov všeobecne vyžaduje identifikáciu extrému funkcie na množine, ktorá je ohraničená rôznymi ohraničujúcimi podmienkami, pričom definičný obor premenných funkcie môže nadobúdať rôzny charakter (celočíselný, reálny, komplexný, diskretný, atď.), a premenné optimalizovanej funkcie musia spĺňať rôzne obmedzujúce podmienky (Čičková, 2007).

Riešenie optimalizačných rozhodovacích úloh závisí predovšetkým od miery štruktúrovanosti optimalizovaného problému, od veľkosti a výpočtovej zložitosti riešenej rozhodovacej úlohy. Pre dostatočne štruktúrovaný model a na ňom definovanú rozhodovaciu úlohu s nízkou výpočtovou zložitou je výhodnejšie na jej riešenie použiť exaktné metódy, ktoré zaručujú dosiahnutie optimálneho riešenia. Ak napr. z časového hľadiska nemožno využiť exaktné metódy, na riešenie rozhodovacích úloh možno použiť heuristické metódy, resp. metódy umelej inteligencie.

Klasifikácia metód na riešenie optimalizačných rozhodovacích úloh sa zvyčajne v literatúre, napr. (Unčovský, 1985) uvádza v štruktúre:

- Exaktné – výsledkom je nájdenie optimálneho riešenia rozhodovacích úloh, ak existuje, avšak tieto metódy sú zvyčajne použiteľné len pre dostatočne štruktúrované rozhodovacie úlohy s nízkou výpočtovou zložitou,
- Heuristické – nezaručujú získanie optimálneho, niekedy ani len prípustného, riešenia rozhodovacej úlohy, poskytujú však často dobré riešenie v prípadoch, keď výpočet exaktného riešenia nie je možný, predovšetkým pre nedostatočne štruktúrované rozhodovacie úlohy s vysokou výpočtovou zložitou,
- Kombinované – pôvodná rozhodovacia úloha sa zvyčajne dekomponuje na rôzne podúlohy, z ktorých jedna množina je riešená exaktnými metódami a druhá množina použitím heuristík.



Obr. 3: Možnosti použitia exaktných techník a metód umelej inteligencie

Rozdiel medzi exaktnými metódami a heuristickými metódami (heuristikami) spočíva predovšetkým v tom, že heuristiky nemusia zabezpečiť nájdanie optimálneho a niekedy ani prípustného riešenia rozhodovacej úlohy (Čičková, 2007). Výhoda heuristických metód však spočíva v skutočnosti, že za pomerne krátky čas môžu poskytnúť dobré riešenie aj pre nedostatočne štruktúrované rozhodovacie úlohy s vysokou výpočtovou zložitou, ktoré sa zvyčajne označuje pojmom suboptimálne riešenie. Heuristika je zvyčajne konštruovaná tak, aby využívala špecifické vlastnosti konkrétnej rozhodovacej úlohy. Heuristiky sa pre svoju jednoduchosť a rýchlosť často využívajú na nájdanie východiskového riešenia, na ktoré je potom v ďalšej etape výpočtu aplikovaný exaktný algoritmus s cieľom nájdania optimálneho riešenia.

Pre algoritmy umelej inteligencie na riešenie optimalizačných rozhodovacích úloh možno použiť klasifikáciu heuristik:

- klasické heuristiky (deterministické algoritmy založené len na štandardných matematických metódach),
- moderné heuristiky, resp. metaheuristiky (algoritmy na báze umelej inteligencie).

Medzi najdôležitejšie metódy umelej inteligencie z aplikačného hľadiska patria (Janíček – Ondráček, 1998):

1. Metódy, pre ktoré sú v ich aplikačnom procese charakteristické tieto fázy (napr. znalostné systémy a tzv. neurónové siete):
 - fáza učenia sa – tzv. „prázdny systém“ tvorený len matematickými štruktúrami je predkladaná množina známych skutočností súvisiacich s riešeným problémom,
 - fáza dotazov – tzv. „naučenému“ systému sú kladené otázky z oblasti, v ktorej bol „učený“,
 - fáza odpovedí – systém je schopný odpovedať na otázky na základe naučených faktov.
2. Metódy, ktoré pri riešení problému využívajú prehľadávanie stavového priestoru riešení s cieľom nájsť globálny extrém určitej optimalizovanej funkcie, ktorej matematické vyjadrenie musí byť známe. K týmto metódam patria napr. genetické algoritmy a simulované chladenie.
3. Hybridné metódy – prepojenie a doplnenie jednotlivých metód umelej inteligencie.

Dôvodom, prečo je v súčasnosti popri existujúcich analytických prístupoch a numerických metódach venovaná veľká pozornosť aj prístupom umelej inteligencie, je fakt, že metódy na báze umelej inteligencie sú použiteľné aj na riešenie rozhodovacích úloh, pre ktoré nie je známy efektívny algoritmus na ich riešenie, ale tiež aj v prípade, keď správanie sa systému možno vyjadriť napríklad len slovne. Pretože pre mnoho matematických problémov nie je doposiaľ známa ich matematická riešiteľnosť, resp. známe existujúce algoritmy nemajú dobré matematické vlastnosti (sú nestabilné numericky alebo vzhľadom na vstupné údaje), použitie algoritmov umelej inteligencie predstavuje jednu z možností riešenia rozhodovacích úloh s veľkou výpočtovou zložitou, resp. rozhodovacích úloh postrádajúcich „žiaduce“ matematické vlastnosti.

3. Výpočtová zložitosť

Teória výpočtovej zložitosti (napr. Brezina, Gežík, Čičková, 2012) je v súčasnosti rozvinutou vednou disciplínou s pomerne zložitým obsahom, ktorá umožňuje rozlíšiť medzi úlohami „ľahko“ a „ťažko“ riešiteľnými a rozhodnúť o vhodnom algoritme použiteľnom na riešenie zodpovedajúcej optimalizačnej rozhodovacej úlohy, pretože od správneho výberu závisí kvalita získaného riešenia. Vlastnosti niektorých dobre štruktúrovaných rozhodovacích úloh umožňujú ich optimálne riešenie aj pre pomerne veľké rozmery (príkladom sú úlohy lineárneho programovania), riešenie niektorých rozhodovacích úloh je už omnoho zložitejšie a identifikácia optimálneho riešenia pre rozhodovacie úlohy veľkých rozmerov nie je možná ani s využitím súčasnej

najvýkonnejšej výpočtovej techniky (napr. väčšina kombinatorických úloh s binárnymi premennými).

Veľký význam preto nadobúda analýza vlastností rozhodovacej úlohy, na základe možno zvoliť efektívny algoritmus na jej riešenie. Zvoleným algoritmom je determinovaná kvalita získaného riešenia, pričom je nutné brať do úvahy existujúce výpočtové možnosti. Zvolená metóda riešenia musí zabezpečiť dosiahnutie požadovaných výstupných informácií (výsledkov) a presne určiť, ktoré vstupné údaje budú potrebné. Výber vhodného algoritmu je zvyčajne determinovaný časom, ktorý je k dispozícii na formuláciu a riešenie rozhodovacej úlohy.

Po formulácii a analýze rozhodovacej úlohy treba opísať logiku a presný postup riešenia rozhodovacej úlohy (logický postup inštrukcií zabezpečujúcich riešenie). Výsledkom je tzv. riešiaci algoritmus, ktorého praktickou implementáciou je zvyčajne zodpovedajúci počítačový program.

Na riešenie akejkoľvek konkrétnej rozhodovacej úlohy možno vo všeobecnosti použiť niekoľko algoritmov. Efektívnosť ich použitia je determinovaná ich časovou a pamäťovou zložitou, ktoré závisia od rozmeru úlohy, teda od počtu všetkých parametrov (vstupných dát – n)¹⁾. *Časová zložitosť* udáva, ako pri zväčšovaní vstupných dát rastie objem času potrebného na riešenie rozhodovacej úlohy. Možno ju určiť ako čas, ktorý potrebuje algoritmus na riešenie rozhodovacej úlohy v závislosti od jej rozmeru, meria sa nepriamo počtom elementárnych krokov algoritmu. *Pamäťová zložitosť* udáva, ako pri zväčšovaní vstupných dát rastie objem pamäte potrebnej na riešenie úlohy.

Algoritmus považovať za lepší, čím kratší čas a menší objem pamäte potrebuje na nájdenie riešenia danej rozhodovacej úlohy. Zjednodušene možno posudzovať algoritmus podľa počtu elementárnych krokov, ktoré sú považované za rovnako časovo náročné (napr. sčítanie, odčítanie, násobenie, delenie, porovnávanie vetvením atď.) a ktoré treba vykonať na vyriešenie danej rozhodovacej úlohy. Vo všeobecnosti však čas závisí nielen od veľkosti rozhodovacej úlohy, ale aj od konkrétnej implementácie algoritmu. Preto je zvyčajne opísaná rýchlosť algoritmu na základe rýchlosti, s akou rastie čas potrebný na vyriešenie rozhodovacej úlohy vzhľadom na jej rozmery.

Vo všeobecnosti je zaujímavý vzťah času potrebného na preverenie záznamov k veľkosti vstupných dát n . Hľadá sa teda funkcia, ktorá vyjadruje celkový čas potrebný na realizáciu príslušnej postupnosti krokov, teda funkcia f , ktorá pre rozsah vstupných údajov veľkosti n určí hodnotu $f(n)$, t. j. čas výpočtu pre vstup danej veľkosti. Zvyčajne sa odhaduje časovú náročnosť výpočtu len rádovo, teda zisťuje sa, či je funkcia lineárna, kvadratická, logaritmická, exponenciálna a pod. V tabuľke 1 sú uvedené odhady hodnôt niektorých funkcií pre zväčšujúce sa hodnoty n .

Tabuľka 1: Odhad hodnôt niektorých funkcií²⁾

N	10	50	100	300	1000
<i>Polynomiálne funkcie</i>					
$\ln(n)$	2,3	3,91	4,61	5,7	6,91
$n\ln(n)$	23,02	195,6	460,52	1711,14	6907,76
$n\log_2 n$	33	282	665	2469	9966
$5n$	50	250	500	1500	5000
n^2	100	2500	10000	90000	10^6
$5n^2$	500	12500	50000	450000	$5 \cdot 10^6$
$30n^2$	3000	75000	300000	$2,7 \cdot 10^6$	$30 \cdot 10^6$
n^3	1000	125000	10^6	$2,7 \cdot 10^7$	10^9

- 1) Avšak v súčasnosti je čoraz jasnejšie, že paralelný čas a veľkosť hardvéru sú tiež dôležité miery zložitosti.
- 2) Na výpočet hodnôt bola použitá internetová služba Wolfram Alpha <http://www.wolframalpha.com/>

Nepolynomiálne funkcie					
2^n	1024	$1,13 \cdot 10^{15}$	$1,27 \cdot 10^{30}$	$2,04 \cdot 10^{90}$	$1,07 \cdot 10^{301}$
e^n	22026,47	$5,18 \cdot 10^{21}$	$2,69 \cdot 10^{43}$	$1,94 \cdot 10^{130}$	$1,97 \cdot 10^{434}$
$n!$	$3,63 \cdot 10^6$	$3,04 \cdot 10^{64}$	$9,33 \cdot 10^{157}$	$3,06 \cdot 10^{615}$	$4,02 \cdot 10^{2567}$
n^n	10^{10}	$8,88 \cdot 10^{84}$	10^{200}	$1,37 \cdot 10^{743}$	10^{3000}

Odhad trvania $f(n)$ operácií, ak je na vykonanie jednej potrebný čas $1 \mu\text{s}$ (10^{-6}s) uvádza tabuľka 2³⁾.

Tabuľka 2: Odhad trvania $f(n)$ operácií, ak jedna vyžaduje čas $1 \mu\text{s}$

N	10	50	100	300	1000
Polynomiálne funkcie					
$\ln(n)$	$2,3 \cdot 10^{-6} \text{ s}$	$3,91 \cdot 10^{-6} \text{ s}$	$4,61 \cdot 10^{-6} \text{ s}$	$5,7 \cdot 10^{-6} \text{ s}$	$6,91 \cdot 10^{-6} \text{ s}$
$n \ln(n)$	$2,3 \cdot 10^{-5} \text{ s}$	$1,96 \cdot 10^{-4} \text{ s}$	$4,61 \cdot 10^{-4} \text{ s}$	$1,71 \cdot 10^{-3} \text{ s}$	$6,91 \cdot 10^{-3} \text{ s}$
$n \log_2 n$	$3,3 \cdot 10^{-5} \text{ s}$	$2,82 \cdot 10^{-4} \text{ s}$	$6,65 \cdot 10^{-4} \text{ s}$	$2,47 \cdot 10^{-3} \text{ s}$	$9,97 \cdot 10^{-3} \text{ s}$
$5n$	$5 \cdot 10^{-5} \text{ s}$	$2,5 \cdot 10^{-4} \text{ s}$	$5 \cdot 10^{-4} \text{ s}$	$1,5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$	$5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$
n^2	10^{-4} s	$2,5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$	10^{-2} s	$9 \cdot 10^{-2} \text{ s}$	1 s
$5n^2$	$5 \cdot 10^{-4} \text{ s}$	$1,25 \cdot 10^{-2} \text{ s}$	$5 \cdot 10^{-2} \text{ s}$	$0,45 \text{ s}$	5 s
$30n^2$	$3 \cdot 10^{-3} \text{ s}$	$7,5 \cdot 10^{-2} \text{ s}$	$0,3 \text{ s}$	$2,7 \text{ s}$	30 s
n^3	10^{-3} s	$0,125 \text{ s}$	1 s	27 s	$16,67 \text{ min.}$
Nepolynomiálne funkcie					
2^n	$1,02 \cdot 10^{-3} \text{ s}$	35,83 rokov	$4,03 \cdot 10^{16} \text{ rokov}$	$6,47 \cdot 10^{76} \text{ rokov}$	$3,39 \cdot 10^{287} \text{ rokov}$
e^n	0,02 s	$1,64 \cdot 10^8 \text{ rokov}$	$8,53 \cdot 10^{29} \text{ rokov}$	$6,15 \cdot 10^{116} \text{ rokov}$	$6,25 \cdot 10^{420} \text{ rokov}$
$n!$	3,63 s	$9,64 \cdot 10^{50} \text{ rokov}$	$2,96 \cdot 10^{144} \text{ rokov}$	$9,7 \cdot 10^{601} \text{ rokov}$	$1,28 \cdot 10^{2554} \text{ rokov}$
n^n	2,78 hod.	$2,82 \cdot 10^{71} \text{ rokov}$	$3,17 \cdot 10^{186} \text{ rokov}$	$4,34 \cdot 10^{729} \text{ rokov}$	$3,17 \cdot 10^{3729} \text{ rokov}$

Z tabuľky 2 je zrejmé, že pri polynomiálnych algoritmoch možno dosiahnuť výsledky aj pre relatívne veľké úlohy, ale napr. algoritmus, ktorý vyžaduje čas 2^n , je nepoužiteľný už pre $n = 50$ a algoritmus, pre ktorý je potrebný čas dokonca $n!$, je ešte zložitejší (prakticky nepoužiteľný už pre $n = 19, 19! \approx 1,22 \cdot 10^{17}$, trvanie v μs : $19! \cdot 10^{-6} \approx 1,22 \cdot 10^{11} \mu\text{s} \approx 121645 \text{ s} \approx 2027 \text{ min} \approx 33,8 \text{ hod.} \approx 1,4 \text{ dňa}$)⁴⁾.

Ani zdokonaľovanie výpočtovej techniky neznamená súčasne veľký pokrok riešenia algoritmi s exponenciálnou zložitou. Pri riešení rôznych optimalizačných rozhodovacích úloh sa nemožno spoliehať len na vývoj v oblasti výpočtovej techniky, ale súčasné smerovanie sa zameriava skôr na vývoj efektívnejších algoritmov.

Na vyriešenie dvoch úloh rovnakej veľkosti môže algoritmus vyžadovať rôzny čas, pričom je nezanedbateľným faktorom aj to, že čas vykonania rovnakých operácií v rôznych programových prostrediach a na rôznych počítačoch môže mať rôzne trvanie. Preto sa uvažuje o tzv. *asymptotickom raste* funkcie $f(n)$, ktorý sa odhaduje pre veľké hodnoty n bez ohľadu na koeficienty funkcie. Funkcia asymptotického rastu sa nazýva *časová zložitosť*, resp. *trieda* algoritmu a označuje sa symbolom θ . Pri asymptotickej zložitosti sa uvažuje len o raste funkcie $f(n)$ pre úlohy veľkých rozmerov. Ak uvažujeme napr. funkciu $f(n) = n^2 + 3n + 4$ a funkciu $f(n) = 3n^2 + 2$, pri asymptotickej zložitosti sa uvažuje len s najviac rastúcim členom, teda n^2 , zanedbávajú sa pomalšie rastúce členy a konštanty, pre obidve funkcie je zložitosť $\theta(n^2)$.

3) Odhadovaný počet protónov viditeľného vesmíru je 79-ciferné číslo a počet mikrosekúnd od „veľkého tresku“ je asi 24-ciferné číslo ($1,5 \cdot 10^{25}$ sekúnd).

4) Pri $n=20$ je odhadovaný čas 24 dní.

Ak za $f(n)$ možno dosadiť polynóm $p(n)$, algoritmus nazývame *polynomiálny algoritmus*, ak nie, ide o exponenciálny algoritmus. Odhad zložitosti týchto tried algoritmov je v tabuľke 1.

Pre polynomiálny algoritmus (rýchly algoritmus) je čas na spracovanie vstupných dát veľkosti n ohraničený zhora funkciou n , $\log n$, n^2 , n^3 a pod. Existuje teda taký polynóm $p(n)$, pre ktorý počet krokov, ktoré algoritmus vykoná pri výpočte, je ohraničený číslom $p(n)$. Potom algoritmus má zložitosť $\theta(p(n))$, pre polynóm $p(n)$.

Pre exponenciálny algoritmus (pomalý algoritmus)⁵⁾ je čas na spracovanie vstupných dát veľkosti n ohraničený zhora funkciou typu $2n$, $n!$, n^n atď. Odhad počtu krokov, ktoré algoritmus vykoná pri výpočte, je prinajmenšom exponenciálny. Menej zložitý je teda ten algoritmus, pre ktorý je funkcia $f(n)$ funkciou s menším rastom. Napríklad algoritmus, ktorý pracuje v čase $\theta(\log(n))$, je lepší a rýchlejší ako ten, čo pracuje v čase $\theta(n)$ a ten je lepší ako algoritmus, ktorý pracuje v čase $\theta(n^3)$. Tiež pre každý polynóm $p(n)$ sú algoritmy pracujúce v čase $\theta(p(n))$ rýchlejšie ako napríklad algoritmy pracujúce v čase napr. $\theta(2^n)$ alebo dokonca $\theta(n!)$. Dôvodom zavedenia pojmu asymptotickej zložitosti (nárastom funkcií, t. j. „správaním“ funkcie od vysokej hodnoty n) je práve porovnanie algoritmov. Nedostatky porovnania podľa asymptotickej zložitosti sú však zrejmé. Napr. algoritmus, ktorý pracuje v čase n^3 , je pomalší ako algoritmus pracujúci v čase 2^n pre vstupy veľkosti $n \leq 9$ a algoritmus pracujúci v čase $1000n$ je pomalší ako algoritmus vyžadujúci čas n^2 , pre všetky vstupy veľkosti $n \leq 999$ (tabuľka 2). To znamená, že v praxi je najlepším prístupom kombinácia oboch typov, t. j. pre úlohy malých rozmerov sa niekedy javí efektívnejšie použiť algoritmus s vyššou zložitosťou.

V teórii zložitosti algoritmov sa rozlišujú triedy tzv. P-úloh a tzv. NP-úloh. Formálne najprejšia definícia P a NP úloh je definícia pomocou nedeterministického Turingovho stroja alebo aspoň nedeterministického algoritmu.

Predmetom teórie zložitosti sú zvyčajne tzv. rozhodovacie úlohy, pričom známejšie sú ich optimalizačné verzie. Cieľom riešenia optimalizačnej verzie úlohy je nájsť také riešenie, ktoré je optimálne z hľadiska určitého kritéria, resp. skupiny kritérií. Cieľom riešenia rozhodovacích verzií úloh je len konečné konštatovanie „áno“ alebo „nie“. Je zrejmé, že riešenie optimalizačnej verzie úlohy nie je ľahšie ako riešenie jej rozhodovacej verzie. Ak nájdeme najlepšie riešenie, vieme, či je aspoň také dobré ako daná hodnota K . Možno však dokázať, že ak je rozhodovacia verzia riešiteľná polynomiálne, je aj optimalizačná verzia riešiteľná polynomiálne. V dôkaze tohto tvrdenia sa využíva fakt, že skladaním, násobením a sčítaním polynómov dostaneme opäť polynómy⁶⁾.

Trieda úloh, ktorých rozhodovacia verzia je algoritmicky riešiteľná v polynomiálnom čase, sa označuje ako trieda P. Algoritmy použiteľné na riešenie takýchto úloh možno označiť za algoritmy „rýchle“, t. j. pri úlohách tohto typu netreba použiť heuristický algoritmus, pretože možno rýchlo a efektívne získať optimálne riešenie.

Existuje však aj trieda úloh, pre ktoré nie je dosiaľ známy algoritmus pracujúci v polynomiálnom čase, avšak existuje nedeterministický algoritmus, ktorý pri správnom výbere umožní ich riešenie v polynomiálnom čase (nedeterministický algoritmus sa líši od deterministického tým, že v niektorých krokoch výpočtu sa možno ľubovoľne rozhodnúť pre niektorý z niekoľkých postupov). Trieda úloh, ktoré možno riešiť nedeterministickým polynomiálnym algoritmom, sa označuje ako trieda NP.

Deterministický algoritmus je špeciálnym typom nedeterministického algoritmu a preto platí $P \subset NP$. Otázka, či platí $P = NP$ alebo $P \neq NP$, je jednou z najdôležitejších nezodpovedaných

5) Je potrebné poznamenať, že za exponenciálne sú považované algoritmy s nepolynomiálnym rastom, napr. $(\lg n)^{\lg n}$, aj keď v matematike sa táto funkcia za exponenciálnu nepovažuje.

6) Fakt, že nedeterministický algoritmus pracuje v polynomiálnom čase, znamená, že každý z krokov vyžaduje polynomiálny čas a tiež aj reťazec s musí mať najviac polynomiálnu dĺžku vzhľadom na veľkosť úlohy.

otázok teoretickej informatiky⁷⁾. Predpokladá sa, že tieto triedy sa nerovnajú, pretože vlastnosť polynomiálnej redukcie zaručuje, že by existovali pre stovky dosiaľ opísaných NP úloh polynomiálne algoritmy. To sa však doteraz nepodarilo dokázať.

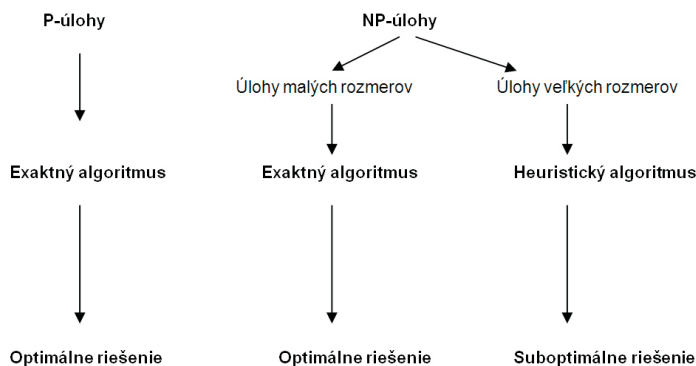
Z triedy NP možno ďalej vymedziť tzv. NP-úplné úlohy. Rozhodovacia úloha je NP-úplná, ak je NP úlohou a každá NP-úloha sa na polynomiálne redukuje. Táto vlastnosť zaručuje, že nájdenie polynomiálneho algoritmu pre jednu úlohu by znamenalo riešenie všetkých ostatných úloh z triedy NP-úplné v polynomiálnom čase.

Ak je pri definícii NP-úplnej úlohy vynechaná požiadavka, aby úloha bola NP-úlohou, získavame tzv. NP-ťažkú úlohu. Úloha je teda NP-ťažká, ak sa na ňu polynomiálne redukuje každá NP-úloha (NP ťažká úloha nemusí byť v triede NP úplná). Ak by sme teda našli algoritmus na riešenie akejkoľvek NP-ťažkej úlohy, vedeli by sme vyriešiť každú NP-úplnú úlohu.

■ Záver

Problematiku analýzy ekonomických procesov a riešenia zodpovedajúcich rozhodovacích úloh je aj v súčasnosti aktuálnou problematikou. Preto je potrebné rozvíjať systémový prístup k modelovaniu ekonomických procesov, ktorý vychádza na jednej strane z koncepcie skúmania ekonomických javov, na druhej strane akceptuje rozvoj matematických prístupov z rôznych aplikačných oblastí. Dôležitou súčasťou systémového prístupu k analýze ekonomických procesov, ktorý zahŕňa identifikáciu problému, analýzu objektu a identifikáciu jeho vlastností, vytvorenie modelu, konštrukciu rozhodovacej úlohy, nájdenie metódy na jej riešenie, nájdenie, resp. vytvorenie zodpovedajúceho algoritmu, výber programu a riešenie rozhodovacej úlohy, verifikáciu modelu, následné simulácie, interpretáciu získaných výsledkov a prijatie rozhodnutia a jeho následnú realizáciu je využitie alebo vytvorenie zodpovedajúceho algoritmu.

Pri riešení úloh triedy P je pomerne ľahké využiť optimalizačný algoritmus s polynomiálnou zložitou, ktorý poskytuje optimálne riešenie pomerne rýchlo a umožňuje aj riešenie rozhodovacích úloh veľkého rozsahu (napr. úloha lineárneho programovania, nájdenie najkratšej cesty v grafe, nájdenie maximálneho toku v grafe atď.). Riešenie úloh triedy NP (úlohy celočíselného, resp. binárneho programovania, problém obchodného cestujúceho atď.) už také jednoduché nie je. Pri riešení NP-úloh možno postupovať dvojakým spôsobom, možno použiť niektorú z exaktných metód, čo pravdepodobne povedie k exponenciálnemu algoritmu (explicitná enumerácia, dynamické programovanie), alebo možno vytvoriť heuristický algoritmus, ktorý bude polynomiálny, ale nemusí vždy viesť k optimálnemu riešeniu. Situácia je znázornená na obrázku 4.



Obr. 4 Použitie rôznych druhov metód na riešenie P- a NP-úloh

7) Otázka, či $P = NP$ bola zaradená medzi tzv. sedem problémov milénia, ktorých zoznam bol zostavený na Clay Mathematics Institute, za vyriešenie každého z nich je riešiteľovi garantovaná odmena 1 000 000 \$.

Rozhodnutie o použití vhodného algoritmu na riešenie úlohy spočíva predovšetkým v schopnosti analyzovať riešenú rozhodovaciu úlohu, určiť jej príslušnosť k triede P, resp. NP a potom na základe jej rozmeru a možnosti použitia výpočtovej techniky určiť algoritmus na riešenie uvedenej rozhodovacej úlohy v závislosti od času, ktorý je k dispozícii na jej riešenie.

Použitá literatúra:

- [1] ACKOFF, R.L., SASIENI, M.: *Foundations of Operations Research*. New York: John Wiley, 1968.
- [2] BREZINA, I., IVANIČOVÁ, Z., PEKÁR, J.: *Operačná analýza*. Bratislava: IURA Edition, 2007.
- [3] BREZINA, I., GEŽÍK, P., ČIČKOVÁ, Z.: *Sieťová analýza*. Bratislava: Ekonóm, 2012.
- [4] COOK, A. S.: *Prehľad teórie výpočtovej složitosti*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 32 (1987), No. 1, 12–29.
- [5] ČIČKOVÁ, Z.: *Metódy operačného výskumu a umelej inteligencie pri riešení optimalizačných problémov*. In Ekonomika a informatika: Bratislava, 2007. ISSN 1336-3514. – Roč. 5, č. 1 (2007), s. 154-162.
- [6] GOGA, M.: *Kvantitatívne metódy a riadenie*. Bratislava: SÚVAHA, 2005. Vydané pre Slovenskú komoru certifikovaných účtovníkov. ISBN 80-88727-90-1
- [7] HAUPT, L. R., HAUPT, S. E.: *Practical Genetic algorithm*. New Jersey: John Wiley&Sons, Inc. Publication, 2004.
- [8] HILLIS, D.: *Obrázce v kameni*. Bratislava: Kalligram, 2002.
- [9] CHAJDIK, J., GRELL, M.: *Podpora rozhodovacích procesov*. Bratislava: Statis, 2006.
- [10] IVANIČOVÁ, Z., BREZINA, I., PEKÁR, J.: *Operačný výskum*. Bratislava: IURA Edition, 2002.
- [11] JANÍČEK, P., ONDRÁČEK, O.: *Řešení problémů modelováním*. Brno: PC-DIR Real, s.r.o., 1998.
- [12] KIŠ, T., ČILEG, M., VUGDELIJA, D., SEDLAK, O.: *Kvantitativni metodi u ekonomiji*. Subotica: Ekonomski fakultet, Novi Sad: Offset print, 2005.
- [13] KOBACZY, K. A. H., VADERA, S., RASMY, M. H.: *AI and OR in management of operations: history and trends*. Journal of the Operational Research Society 58, 2007
- [14] MAŘÍK, V., ŠTĚPÁNKOVÁ, O., LAŽANSKÝ, J.: *Umělá intelligence 3*. Praha: Academia, 2001.
- [15] ONWUBOLU, G. C., BABU, B. V.: *New Optimization Techniques in Engineering. Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Berlin, Heidelberg, New York, Hong Kong, London, Milano, Paris, Tokyo Springer, Volume 14, 2004.
- [16] PALÚCH, S.: *Algoritmická teória grafov*. Žilina: ŽU v Žiline, 2008. Dostupné na: <http://frcatel.fri.uniza.sk/users/paluch/graf.pdf>.
- [17] SAKÁL, P., JERZ, V.: *Operačná analýza v praxi manažéra II*. Trnava: SP SYNERGIA, 2006.
- [18] SEKAJ, I.: *Evolučné výpočty a ich využitie v praxi*. Bratislava: IRIS, 2005
- [19] SOJKA, J., WALTER, J. a kol.: *Matematické modelovanie ekonomických procesov*. Bratislava: ALFA, 1986.
- [20] ŠEFRÁNEK, J.: *Inteligencia ako výpočet*. Bratislava: IRIS, 2000.
- [21] ŠIMKOVIC, J., TEREK, M.: *Systémové modelovanie*. Bratislava: ALFA, 1987.
- [22] TURING, A.: *Computing machinery intelligence*. Mind 59, 1950.

- ▶ [23] UNČOVSKÝ, L.: *Operačná analýza v riadení podnikov*. Bratislava: ALFA, 1985.
- ▶ [24] ZÁVODNÝ, P., CHUDÁ, D.: *Globalizácia, nová ekonomika a podnikové informačné systémy*. In *Ekonomika a informatika*. Bratislava. 2006. – ISSN 1336-3514. – Roč. 4, č. 1 (2006), s. 75-91.
- ▶ [25] ZELINKA, I.: *Umělá intelligence v problémech globální optimalizace*. Praha: BEN-technická literatura, 2002.

prof. Ing. Ivan Brezina, CSc.,

Katedra operačného výskumu a ekonometrie, Fakulta hospodárskej informatiky,
Ekonomická univerzita v Bratislave, Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava,
brezina@euba.sk, 0267295821

Ing. Zuzana Čičková, PhD.,

Katedra operačného výskumu a ekonometrie, Fakulta hospodárskej informatiky,
Ekonomická univerzita v Bratislave, Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava,
cickova@euba.sk, 0267295820